1. **(0,5 puntos)**
Razona si puede existir un grafo de orden 12, con 28 aristas y tal que todos sus vértices tengan grado 3 ó 4.

Si existiera dicho grafo, tendríamos la siguiente contradicción

$$2\text{x}28=56=\sum \delta(v) \leq 4\text{x}12=48$$

Por tanto, no existe tal grafo.

2. **(1,5 puntos)**

a) Demuestra, por inducción, que el número $10^{n+1} + 4\cdot 10^n + 4$ es un múltiplo de 12 para todo número natural n.

Primer paso. Comprobamos que el resultado es cierto para n=1: $10^2 + 4\cdot 10 + 4=144=12^2$.

Segundo paso. Suponiendo que el resultado es cierto para k, debemos probar que el resultado es cierto para k + 1
La hipótesis de inducción (H.I.) es que: $10^{k+1} + 4\cdot 10^k + 4=12\cdot x$.

$10^{k+1+1} + 4\cdot 10^{k+1} + 4=10\cdot(10^{k+1} + 4\cdot 10^k)+4=10 \cdot (12x-4)+ 4= 10\cdot 12x - 40 +4= 12\cdot 10\cdot x- 36$
$10^{k+1+1} + 4\cdot 10^{k+1} + 4=12\cdot (10\cdot x -3)$. Como queríamos demostrar.

b) Enuncia el Teorema Fundamental de la Aritmética. Demuestra que si p es un número primo que divide al producto ab, entonces p divide a uno de los dos factores.

3. **(0,5 puntos)**
Calcula, si existen, el inverso de 16 y el inverso de 81 en Z_{45}

Recordemos que un elemento a es inversible en Z_m si y sólo si mcd(a,m) = 1.

- Resulta evidente que mcd(81, 45)=9 $\neq$ 1, por tanto 81 NO tiene inverso en Z_{45}
- Como mcd(16,45) = 1 y, por tanto, 16 SÍ tiene inverso en Z_{45}

Lo calculamos encontrando x, y tales que 16 x + 45 y = 1 con el algoritmo de Euclides extendido y sale que el inverso de 16 en Z_{45} es 31.

4. **(1,5 puntos)**

Resuelve el sistema de congruencias $\begin{cases} 9x \equiv 63 \pmod{66} \\ 5x \equiv 7 \pmod{8} \\ 2x \equiv 24 \pmod{30} \end{cases}$

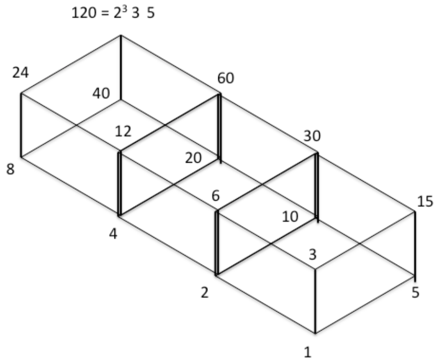
Primero simplificamos usando la propiedad cancelativa y el sistema equivalente queda:

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{22} \\ x \equiv 3 \pmod{8} \\ x \equiv 12 \pmod{15} \end{cases}$$

Los módulos no son coprimos dos a dos, por lo que no puedo usar el teorema chino del resto.
Usando el método de sustitución llegamos a la solución x=1107 (mod 1320).

5. **(2 puntos)**

   a) **Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado (D_{120}, |). Dado el subconjunto A = {2, 4, 5, 10, 20, 30, 60}, halla los elementos maximales, minimales, cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo si existen de A.**



Maximales : {60}.
Minimales: {2,5}.
Cotas superiores: {60,120}.
Supremo: 60
Cotas inferiores: {1}. Ínfimo: 1.
Máximo:60. No existe mínimo.

   b) **Definición de retículo, de retículo complementario y de álgebra de Boole. Averigua si los conjuntos ordenados (D_{44}, |) y (D_{66}, |) son retículos y si son álgebras de Boole. Halla el complementario de 2 y de 22, si existen, en ambos conjuntos.**

   (D44, |) y (D66, |) son retículos y sólo (D66, |) es álgebras de Boole. En (D66, |) el complementario de 2 es 33 y el de 22 es 3. En (D44, |), 2 y 22 no tienen complementario.

6. **(1 punto)**
   Una máquina tragaperras permite en cada jugada elegir un número del 0 al 31, asignando premio al número 11 y a todos los números comprendidos entre 0 y 9. Diseña una expresión mínima en forma de suma de productos que represente la jugada.

   Para describir los números debemos usar 5 variables binarias (a,x,y,z,t), pero el conjunto a destacar empieza por a=0. Por esto podemos simplificar la expresión en las variables (x,y,z,t) y luego multiplicamos por a’ la expresión. Utilizando el mapa de Karnaugh obtenemos: x’+y’z’+y’t

   Por tanto, la solución es a’x’+ a’y’z’+a’y’t

7. **(0,5 punto)**
   En el Torneo de Tenis de Montegancedo participan n jugadores. Cada uno de ellos juega contra todos los demás una única vez. Demuestra que, si todos los participantes ganan al menos un partido, entonces hay al menos dos jugadores con el mismo numero de victorias.

   El número de partidos ganados por cada jugador es un número entre 1 y n-1. Por otro lado, si asignamos a cada jugador el número de partidos ganados, obtenemos una distribución de n objetos en n-1 cajas. Por el principio del palomar al menos dos jugadores han tenido el mismo número de victorias.

8. **(1,5 puntos)**
   En una mesa se ponen 13 platos para 13 diferentes comensales. Tenemos 5 cigalas (indistinguibles) y 8 vieiras (también indistinguibles). Se sirven todas las piezas y estamos interesados en saber el número de diferentes mesas servidas con las vieiras y las cigalas en los platos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

   a) **Sólo se sirve una pieza en cada plato.**

$$\binom{13}{8}$$

b) **Se pueden servir varias piezas en el mismo plato y los platos pueden quedar vacíos**.

$$\binom{17}{5}\binom{20}{8}$$

c) **Se pueden servir varias piezas en el mismo plato y los platos pueden quedar vacíos, pero nadie puede comerse más de 2 vieiras.**

$$\binom{17}{5}\times\left[\binom{20}{8}-\binom{13}{1}\binom{17}{5}+\binom{13}{2}\binom{14}{2}\right]$$

9. **(1 punto)**
Sea a_n el de listas de longitud n formadas con los dígitos {0, 1, 2} que no tienen ni dos ceros consecutivos ni dos unos consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para la sucesión a_n y encuentra la solución general de la ecuación homogénea, sin imponer condiciones iniciales.

Sea b_n el número de las n-listas consideradas que terminan en 0, c_n el de las que terminan en 1 y d_n el de las que terminan en 2. Las que terminan en 0 tienen en la penúltima posición un 1 o un 2 (no pueden tener un 0). Así pues, $b_n = c_{n-1} + d_{n-1}$.
Las que terminan en 1 tienen en la penúltima posición un 0 o un 2 (no pueden tener un 1). Por lo tanto, $c_n = b_{n-1} + d_{n-1}$.
Finalmente, las que terminan en 2 pueden tener cualquiera de las tres cifras en la penúltima posición. Se tiene que $d_n = a_{n-1}$:
Utilizando estas tres relaciones, junto con que $a_n = b_n + c_n + d_n$, se deduce que $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.
La solución general de la ecuación homogénea es:

$$A\left(1+\sqrt{2}\right)^n + B\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$